UDC: 519.8 DOI: https://doi.org/10.15407/jai2021.02.64

NUMERICAL ALGORITHMS FOR SOLVING AN ELLIPTIC OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A POWER-LAW NONLINEARITY

L. Hart[1], **N. Yatsechko**[2]
[1,2]Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine
72, Gagarin Ave, Dnipro, 49010

[1]https://orcid.org/0000-0003-2617-7851

Abstract. The paper is devoted to the development and analysis of approximation-iteration algorithms based on the method of grids and the method of lines for solving an elliptic optimal control problem with a power-law nonlinearity. For the numerical solution of the main boundary value problem and the adjoint one, the second order of accuracy difference schemes are applied using the implicit method of simple iteration. Computational schemes of the method of lines for solving the above-mentioned elliptic boundary value problems are implemented in combination with the shooting method for the approximate solution of boundary value problems for the corresponding ordinary differential equations systems arising in the considered domain after lattice approximation. To minimize the objective functional, well-known gradient-type methods (gradient projection and conditional gradient methods) of constrained optimization are used. The essence of the proposed approximation-iteration approach consists in replacing the original extremal problem with a sequence of grid problems that approximate it on a set of refining grids, and applying an iterative gradient-type method to each of the "approximate" extremal problems. In this case, we propose to construct only a few approximations to the solution for each of the "approximate" problems and to take the last of these approximations, using piecewise linear interpolation, as the initial approximation in the iterative process for the next "approximate" problem. The sequence of the corresponding piecewise linear interpolants is considered as a sequence of approximations to the solution of the original extremal problem. The paper discusses the theoretical foundations of this combined approach, as well as its advantages over traditional methods using the example of solving a model optimal control problem.

Keywords: optimal control problem, elliptic system, power-law nonlinearity, grid method, method of lines, approximation schemes.

ЧИСЛОВІ АЛГОРИТМИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЕЛІПТИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ЗІ СТЕПЕНЕВОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Л.Л. Гарт[1], **Н.Є. Яцечко**[2]
[1,2]Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Україна
пр. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010

[1]https://orcid.org/0000-0003-2617-7851

Анотація. Стаття присвячена розробці та аналізу апроксимаційно - ітераційних алгоритмів, заснованих на методі сіток та методі прямих, для розв'язання задачі оптимального керування еліптичною системою зі степеневою нелінійністю. Для числового розв'язання основної та спряженої крайових задач використано різницеві схеми другого порядку точності із застосуванням неявного методу простої ітерації. Обчислювальні схеми методу прямих для розв'язання зазначених еліптичних крайових задач реалізовані у поєднанні з методом стрільби для наближеного розв'язання крайових задач для відповідних систем звичайних диференціальних рівнянь, виникаючих у розглядуваній області після решітчастої апроксимації. Для мінімізації цільового функціонала використано відомі методи умовної оптимізації градієнтного типу (методи проєкції градієнта та умовного градієнта). Суть пропонованого апроксимаційно - ітераційного підходу полягає в заміні вихідної екстремальної задачі послідовністю сіткових задач, апроксимуючих її на сукупності сіток, що подрібнюються, і застосуванні того чи іншого ітераційного методу градієнтного типу до кожної з «наближених» екстремальних задач. При цьому пропонується будувати лише декілька наближень до розв’язку кожної із «наближених» задач і приймати останнє з цих наближень, використовуючи кусково лінійну інтерполяцію за початкове наближення в ітераційному процесі для наступної «наближеної» задачі. Послідовність відповідних кусково лінійних інтерполянтів розглядається як послідовність наближень до розв’язку вихідної екстремальної задачі. У роботі обговорюються теоретичні основи такого комбінованого підходу, а також його переваги перед традиційними методами на прикладі розв’язання модельної задачі оптимального керування.

Ключові слова: задача оптимального керування, еліптична система, степенева нелінійність, метод сіток, метод прямих, апроксимаційні схеми.

Вступ

У даний час математичне моделювання є невід'ємною частиною скільки - небудь великих науково-технічних розробок. Математичні моделі оптимізації для систем із розподіленими параметрами – це найбільш складний клас оптимізаційних задач, особливо для систем керування нелінійного типу, значна прикладна важливість яких виявляється, наприклад, під час оптимізації процесів теплофізики, дифузії, фільтрації, теорії пружності, а також під час розв’язання обернених задач для рівнянь математичної фізики, що розглядаються у варіаційній постановці [1]. Потреби математичного моделювання нелінійних оптимальних процесів зумовлюють необхідність розробки та розвитку ефективних числових методів оптимального керування з використанням комп'ютерних систем.

Слід відмітити, що загальної методики для розв’язання нелінійних оптимізаційних задач на сьогодні не існує через їх велику різноманітність залежно від виду правих частин диференціальних рівнянь різних об'єктів: стаціонарних, нестаціонарних, із запізненням, нелінійних за координатами та керуваннями, їх структури та критерію оптимальності. Через ці фактори для знаходження оптимального керування зазвичай використовують таку методику, що дозволяє визначати і прогнозувати загальні й окремі результати залежно від особливостей об'єкта керування та критерія оптимальності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Для систем керування еліптичного типу конструктивна теорія і методи отримання оптимальних розв’язків представлені, наприклад, у монографіях [2-6]. Результати сучасних досліджень як теоретичного, так і прикладного характеру стосовно задач оптимального керування системами зі степеневими нелінійностями, містяться в роботах [7-10] та ін. Зокрема, у роботі [7] досліджено керовані нелінійні системи, що використовуються як наближення до моделі Біна теорії надпровідності II-го типу у просторовому випадку, з якими тісно пов'язана система рівнянь пористого середовища. Встановлено властивість фінітності носія розв'язання задачі Коші для нелінійних нестаціонарних систем у тривимірному випадку. У [8] досліджено граничне оптимальне керування в контактній моделі зі степеневим тертям у антиплощини; отримано умови оптимальності залежно від степеневого показника і запропоновано обчислювальну схему, засновану на лінеаризації та методі нерухомої точки. У [9] розглянуто задачу оптимального керування степеневою нелінійністю для диференціального рівняння Шредінгера, що виникає в нелінійній оптиці. На підставі глобальної коректності такого рівняння показано існування оптимального керування, доведено диференційованість цільового функціонала за Фреше та надано умови оптимальності першого порядку. У роботі [10] для керованої системи, що описується рівнянням еліптичного типу зі степеневою нелінійністю, де залежність функції стану від керування не диференційована за Гато, доведено розширену диференційованість зазначеної залежності та отримано необхідні умови оптимальності, що дає можливість охопити нові класи критеріїв оптимальності, зокрема, вивчити задачу граничного спостереження. За малих значень швидкості зростання нелінійності та розмірності області в таких системах похідна Гато існує, і виведення умов оптимальності (як необхідних, так і достатніх) не викликає труднощів, внаслідок чого можна користуватися відомими методами оптимізації систем, що описуються нелінійними еліптичними рівняннями.

Постановка проблеми

У даній роботі розглядається наступна задача оптимального керування

еліптичною системою зі степеневою нелінійністю [11]: мінімізувати функціонал

$$J(u)=\int_{\Omega}\left(y(x)-z(x)\right)^2 d\Omega+$$
$$+\mu\int_{\Omega}\left(u(x)-v(x)\right)^2 d\Omega \quad (1)$$

за умов

$$-\Delta y(x)+y^3(x)=f(x)+u(x),\ \ x\in\Omega; \quad (2)$$
$$y(x)=0,\ \ x\in\Gamma, \quad (3)$$

де $\Omega\subset 1$ – відкрита обмежена область з достатньо гладкою межею Γ; $z(x)\in L_2(\Omega),\ v(x)\in L_2(\Omega),\ f(x)\in L_{4/3}(\Omega)$ – відомі функції для $x=(x_1,x_2)\in\Omega$; $\mu>0$ – відома стала; $u\equiv u(x)$ – керування, визначене на множині

$$U=\{u(x)\in L_2(\Omega):\ u(x)\in V\ \text{м.в.}\}, \quad (4)$$

$V\subset L_2(\Omega)$ – опукла замкнена множина; $y(x)\equiv y(x;\,u)$ – функція стану системи, що відповідає керуванню $u\in U$;

$\Delta\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа

Нелінійності задач для станів у математичних моделях оптимального керування зазначеного вигляду можуть бути обумовлені цікавими для практики випадками: наявністю стоків субстанції (наприклад, дифузія речовини в активних середовищах із поглинанням речовини за нелінійним законом, в яких дифундуюча речовина вступає в хімічні реакції із середовищем, що супроводжуються нелінійним стоком субстанції); процесами кліматизації крізь межу або дифузії крізь мембрану, що обмежує область; біохімічними процесами; під час аналізу ліній передач з витоком в електротехніці та ін. [12].

У роботі [11] встановлено факт існування та єдиності в банаховому просторі $Y=H_0^1(\Omega)\bigcap L_4(\Omega)$ узагальненого розв'язку $y(x)\equiv y(x;u)$ крайової задачі (2), (3) за будь-якого допустимого керування $u\in U$. З результатів [13] до того ж випливає, що функціонал (1) за умов (2)-(4) є сильно опуклим і двічі неперервно диференційованим за Гато на множині U, причому його похідна Гато в кожній точці $u\equiv u(x)\in U$ може бути подана у вигляді

$$J'(u)=\psi(x)+2\mu\left(u(x)-v(x)\right),\ \ x\in\Omega, \quad (5)$$

де функція $\psi(x)\equiv\psi(x;u)$ є узагальненим розв'язком спряженої системи

$$-\Delta\psi(x)+3y^2(x)\psi(x)=2(y(x)-z(x)), \quad (6)$$
$$x=(x_1,x_2)\in\Omega;$$
$$\psi(x)=0,\ \ x\in\Gamma. \quad (7)$$

Таким чином, обчислення градієнта $J'(u)$ функціонала (1) за умов (2) – (4) в точці $u\equiv u(x)\in U$ потребує послідовного розв'язання відповідних еліптичних крайових задач з однорідними умовами Діріхле: нелінійної крайової задачі (2), (3) відносно функції стану системи $y(x)\equiv y(x;u)$ і спряженої лінійної крайової задачі (6), (7) відносно $\psi(x)\equiv\psi(x;u)$.

Отже, сильно опуклий неперервний функціонал $J(u)$ за умов (2) – (4) на замкненій опуклій множині U з гільбертового простору $L_2(\Omega)$ досягає нижньої грані $J^*=\inf_{u\in U}J(u)$ у єдиній точці, тобто для будь-якого $z(x)\in L_2(\Omega)$ та майже для всіх $v(x)\in L_2(\Omega)$ існує оптимальний розв'язок $\left(u^*(x),y^*(x)\right)$ задачі керування (1) - (4), такий, що $J(u^*)=J^*$, де $u^*\equiv u^*(x)\in U$ – оптимальне керування, $y^*(x)\equiv y(x;u^*)$, $x\in\Omega$ – відповідна оптимальна траєкторія системи.

Мета дослідження

Зазначена робота присвячена розробці та аналізу нових апроксимаційно-ітераційних алгоритмів, заснованих на методі сіток та методі прямих, для розв'язання задачі оптимального керування еліптичною системою зі степеневою нелінійністю (1) - (4). Для числового розв'язання еліптичних крайових задач (2), (3) та (6), (7) пропонується використовувати скінченно-різницеві схеми другого порядку точності із застосуванням неявного методу простої ітерації [14] та обчислювальні схеми методу прямих [15] у сполученні з методом стрільби для наближеного розв'язання крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), що виникають в області Ω під час решітчастої

апроксимації. Для побудови сіткових аналогів функціонала (1) використовується метод скінченних сум (квадратур), а для пошуку нижньої грані апроксимованого функціонала – відомі методи скінченно-вимірної умовної мінімізації.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо питання про застосування проєкційно - ітераційного підходу до розв'язання задачі (1) - (4) оптимального керування еліптичною системою зі степеневою нелінійністю. При цьому в ролі проєкційних (апроксимаційних) методів пропонується використовувати методи сіток та прямих, а в ролі ітераційних методів мінімізації цільового функціонала – метод проєкції градієнта та метод умовного градієнта. Запропонований підхід укладається в загальну схему проєкційно - ітераційних методів розв'язання задач мінімізації з обмеженнями в гільбертових просторах, теоретично обґрунтованих в [16], і супроводжується детально описаними обчислювальними технологіями, що дозволяє довести ідею проєкційно-ітераційного підходу до успішного розрахунку.

Проєкційний метод у гільбертовому просторі

Нехай на деякій множині U дійсного сепарабельного гільбертового простору H заданий обмежений знизу функціонал $F(u)$:

$$\inf_{u\in\Omega} F(u)=F^*>-\infty. \qquad (8)$$

Для наближеного розв'язання задачі мінімізації $F(u)$ на U:

$$F(u)\to\inf,\quad u\in U\subset H, \qquad (9)$$

апроксимуємо функціонал $F(u)$ послідовністю більш простих «наближених» функціоналів $\tilde F_n(\tilde u_n)$, $n=1,2,\ldots$, заданих відповідно на деяких множинах $\tilde U_n$ дійсних гільбертових просторів $\tilde H_n$. Будемо вважати, що простори $\tilde H_n$ ізоморфні підпросторам H_n основного простору H ($H_1\subset H_2\subset\ldots\subset H_n\subset\ldots\subset H$) і Φ_n – лінійні неперервно оборотні оператори, які здійснюють взаємно однозначне відображення H_n на $\tilde H_n$; Φ_n^{-1} – оператори оборотного відображення $\tilde H_n$ на H_n, причому Φ_n рівномірно по n обмежені, тобто $\|\Phi_n\|\le C'$, $n=1,2,\ldots$. У цьому випадку множини $\tilde U_n\subset\tilde H_n$ мають вигляд

$$\tilde U_n=\{\tilde u_n\in\tilde H_n:\ \tilde u_n=\Phi_n u_n,\ u_n\in U_n=U\bigcap H_n\},$$
$$n=1,2,\ldots,\ \tilde U_1\ne\varnothing. \qquad (10)$$

Будемо припускати надалі, що функціонали $\tilde F_n(\tilde u_n)$, $n=1,2,\ldots$ пов'язані з вихідним функціоналом $F(u)$ умовою близькості

$$|\tilde F_n(\tilde u_n)-F(\Phi_n^{-1}\tilde u_n)|\le\tilde\beta_n,\quad \forall\tilde u_n\in\tilde U_n, \qquad (11)$$

де $\tilde\beta_n\to 0$ при $n\to\infty$, а множини $\tilde U_n$, $n=1,2,\ldots$ пов'язані з U умовою

$$\forall u\in U\ \ \exists\{\tilde u_n\}_{n=1}^{\infty},\ \tilde u_n\in\tilde U_n:\ \lim_{n\to\infty}\Phi_n^{-1}\tilde u_n=u. \qquad (12)$$

З умов (11) і (8), зокрема, виходить співвідношення

$$F^*-\tilde\beta_n\le F(\Phi_n^{-1}\tilde u_n)-\tilde\beta_n\le\tilde F_n(\tilde u_n), \qquad (13)$$
$$\forall\tilde u_n\in\tilde U_n,\ n=1,2,\ldots,$$

звідки випливає обмеженість знизу кожного з наближених функціоналів $\tilde F_n(\tilde u_n)$ на відповідній множині $\tilde U_n$:

$$\inf_{\tilde u_n\in\tilde U_n}\tilde F_n(\tilde u_n)=\tilde F_n^*>-\infty,\quad n=1,2,\ldots.$$

Будемо розглядати для кожного $n=1,2,\ldots$ задачу мінімізації $\tilde F_n(\tilde u_n)$ на $\tilde U_n$:

$$\tilde F_n(\tilde u_n)\to\inf,\quad \tilde u_n\in\tilde U_n\subset\tilde H_n, \qquad (14)$$
$$n=1,2,\ldots$$

Збіжність в H проєкційного методу розв'язання задачі (9) встановлює Теорема 1 [16].

Нехай U – обмежена замкнена опукла множина з гільбертова простору H, $\tilde U_n$ – множина виду (10) з гільбертова простору $\tilde H_n$ ($n=1,2,\ldots$), пов'язана з U умовою (12). Нехай виконується (8), функціонали $F(u)$ і $\tilde F_n(\tilde u_n)$ опуклі і неперервні на U і $\tilde U_n$ відповідно ($n=1,2,\ldots$) і задовольняють умову близькості (11). Тоді за кожного $n=1,2,\ldots$ функціонал $\tilde F_n(\tilde u_n)$ досягає на $\tilde U_n$ своєї нижньої грані і для будь-яких $\tilde u_n^*\in\tilde M_n^*$ ($\tilde M_n^*$

– множина точок мінімуму $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на $\tilde{U}_n$) $\lim_{n\to\infty}\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*)=F^*$. При цьому будь-яка послідовність $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ є мінімізуючою для $F(u)$ на U і кожна її слабка гранична точка є точкою мінімуму $F(u)$ на U, а у разі єдиності точки мінімуму $u^*\in U$ до неї слабко збігається вся послідовність $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. Якщо, крім того, функціонал $F(u)$ сильно опуклий на U, то $\lim_{n\to\infty}\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^*=u^*$.

Апроксимаційна схема, основана на методі сіток.

Метод сіток (скінченних різниць) є найбільш вживаним числовим методом під час розв'язання крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь завдяки його універсальності та ефективності. Універсальність полягає у можливості застосування цього методу як для лінійних, так і для нелінійних крайових задач, для задач різної розмірності та для областей складної (неканонічної) форми.

Будемо вважати для простоти, що в задачі оптимального керування (1) - (4) область $\Omega\subset 1^2$ є прямокутною, тобто

$$\bar{\Omega}=\Omega\bigcup\Gamma=\{x=(x_1,x_2):\ 0\le x_\alpha\le l_\alpha,\ \alpha=1,2\},$$

і нелінійність у рівнянні стану (1) є слабкою, тобто існує стала $c>0$, така, що $3y^2(x)\le c,\ \forall x\in\bar{\Omega}$. Вважатимемо також, що U – обмежена замкнена опукла множина з $L_2(\Omega)$, яка має вигляд

$$U=\{u(x)\in L_2(\Omega):\ d_1\le u(x)\le d_2 \text{ м.в.}\},\quad (15)$$

де d_1 і d_2 – задані сталі, $-\infty<d_1<d_2<\infty$.

Для наближеного розв'язання задачі керування (1) - (3), (15) введемо в $\bar{\Omega}$ прямокутну рівномірну сітку вузлів з кроками h_1 та h_2 за напрямами x_1 та x_2 відповідно так, що $h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha\ (\alpha=1,2)$, де $N_1>0$ та $N_2>0$ – цілі числа:

$$\bar{\omega}_h=\omega_h\cup\gamma_h=\{(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)})\in\bar{\Omega}:$$
$$x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=0,1,...,N_\alpha,\ \alpha=1,2\}.$$

Тут $h=(h_1,\,h_2)$; ω_h – сукупність всіх внутрішніх вузлів; γ_h – межа сітки $\bar{\omega}_h$:

$$\gamma_h=\{(x_1^{(0)},x_2^{(i_2)}),\ (x_1^{(N_1)},x_2^{(i_2)})\}_{i_2=1}^{N_2-1}\bigcup$$
$$\bigcup\{(x_1^{(i_1)},x_2^{(0)}),\ (x_1^{(i_1)},x_2^{(N_2)})\}_{i_1=1}^{N_1-1}.$$

Дотримуючись [17], замінимо інтеграли в (1) скінченними сумами за кубатурною формулою прямокутників, а рівняння стану (2) – різницевими рівняннями другого порядку точності [14]. У результаті прийдемо до наступної задачі мінімізації сіткового функціонала

$$J_h(\tilde{u})=\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}(y_{i_1,i_2}-z_{i_1,i_2})^2h_1h_2+$$
$$+\mu\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}(u_{i_1,i_2}-v_{i_1,i_2})^2h_1h_2\qquad(16)$$

за умов

$$-\Lambda y_{i_1,i_2}+y_{i_1,i_2}^3=f_{i_1,i_2}+u_{i_1,i_2},\ \ x\in\omega_h;\quad(17)$$

$$y_{i_1,i_2}=0,\ \ x\in\gamma_h,\qquad(18)$$

$$\tilde{u}\in\tilde{U}=\{\ \tilde{u}=\{u_{i_1,i_2}\}\in H_h:\ d_1\le u_{i_1,i_2}\le d_2,$$
$$i_\alpha=1,2,...,N_\alpha-1,\ \ \alpha=1,2\}\qquad(19)$$

у гільбертовому просторі H_h сіткових функцій $\tilde{u}=\{u_{i_1,i_2}\}$, визначених на ω_h, зі скалярним добутком елементів

$$(\tilde{u},\ \tilde{w})_{H_h}=\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}u_{i_1,i_2}w_{i_1,i_2}h_1h_2,\ \ \forall\tilde{u},\tilde{w}\in H_h$$

і нормою $\|\tilde{u}\|_{H_h}=\sqrt{(\tilde{u},\ \tilde{u})_{H_h}}$. Тут

$$u_{i_1,i_2}\approx u(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)}),\ \ y_{i_1,i_2}\approx y(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)}),$$
$$z_{i_1,i_2}=z(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)}),\ \ v_{i_1,i_2}=v(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)}),$$
$$f_{i_1,i_2}=f(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)}),\ i_\alpha=\overline{1,N_\alpha-1}\ \ (\alpha=1,2);$$

Λ – різницевий оператор Лапласа:

$$\Lambda y_{i_1,i_2}\equiv\frac{1}{h_1^2}(y_{i_1-1,i_2}-2y_{i_1,i_2}+y_{i_1+1,i_2})+$$
$$+\frac{1}{h_2^2}(y_{i_1,i_2-1}-2y_{i_1,i_2}+y_{i_1,i_2+1}),\ \ x\in\omega_h.$$

Різницеву схему (17), (18) для фіксованого $\tilde{u}\in\tilde{U}$ з (19) можна записати у вигляді нелінійного операторного рівняння

$$A\,\tilde{y}=\tilde{f}+\tilde{u}\qquad(20)$$

у просторі H_h,

$$\text{де } A\,\tilde{y}\equiv-\Lambda y_{i_1,i_2}+y_{i_1,i_2}^3,\ \ x\in\omega_h.$$

Нескладно бачити, що оператор A диференційований за Гато в H_h, причому його похідна Гато $A'(\tilde{p})$ для будь-якого $\tilde{p}\in H_h:\ p_{i_1,i_2}=0,\ x\in\gamma_h$ визначається за формулою

$$A'(\tilde{p})\tilde{y}=-\Lambda y_{i_1,i_2}+3p_{i_1,i_2}^2\,y_{i_1,i_2},\ \ x\in\omega_h,$$

$$\forall \tilde{y} \in H_h:\ y_{i_1,i_2} = 0,\ \ x \in \gamma_h .$$

Крім того, $A'(\tilde{p})$ є самоспряженим і додатньо визначеним лінійним оператором в H_h, енергетично еквівалентним різницевому оператору $-\Lambda$:

$$-\mu_1\,\Lambda \le A'(\tilde{p}) \le -\mu_2\,\Lambda ,$$

де $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1 + c/\gamma_1$, γ_1 – мінімальне власне значення оператора Λ.

Для розв'язання нелінійного операторного рівняння (20) скористаємося неявним методом простої ітерації [14]

$$B\,\frac{\tilde{y}^{(k+1)} - \tilde{y}^{(k)}}{\tau} + A\,\tilde{y}^{(k)} = \tilde{f} + \tilde{u},\quad k = 0,1,\ldots,$$

де візьмемо $B = -\Lambda$, $\tau = 2/(\mu_1 + \mu_2)$ і довільне початкове наближення $\tilde{y}^{(0)} \in H_h$. Вочевидь, для знаходження $\tilde{y}^{(k+1)}$ при заданому $\tilde{y}^{(k)}$ $(k = 0,1,\ldots)$ потрібно розв'язати лінійне операторне рівняння

$$B\tilde{y}^{(k+1)} = \tilde{\varphi},\ \ \tilde{\varphi} = B\tilde{y}^{(k)} - \tau(A\,\tilde{y}^{(k)} - \tilde{f} - \tilde{u}),$$

або, що те ж саме, різницеву задачу Діріхле для рівняння Пуассона:

$$\Lambda y^{(k+1)}_{i_1,i_2} = (1-\tau)\ \Lambda y^{(k)}_{i_1,i_2} +$$
$$+\tau\Big((y^{(k)}_{i_1,i_2})^3 - f_{i_1,i_2} - u_{i_1,i_2}\Big),\ \ x \in \omega_h; \quad (21)$$
$$y^{(k)}_{i_1,i_2} = 0,\ \ x \in \gamma_h;\ \ k = 0,1,\ldots$$

Оператор Λ у схемі (21) можна обертати одним із прямих методів, наприклад методом розділення змінних [14]. За критерій закінчення ітераційного процесу (21) неявного методу простої ітерації можна обрати такий: $\|\,\tilde{y}^{(k+1)} - \tilde{y}^{(k)}\,\|_{H_h} < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – задана точність обчислень.

Після отримання для вихідної нелінійної крайової задачі (2), (3) її сіткового розв'язку $\tilde{y} = \{y_{i_1,i_2}\},\ x \in \overline{\omega}_h$, що відповідає даному керуванню $\tilde{u} \in \tilde{U}$, можна розв'язувати спряжену лінійну крайову задачу (6), (7) відносно функції $\psi(x) \equiv \psi(x;u),\ x \in \Omega$. Так само, як і раніше, замінімо еліптичне рівняння (6) на сітці $\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ відповідними різницевими рівняннями другого порядку точності, в результаті чого прийдемо до сіткової крайової задачі

$$-\Lambda\psi_{i_1,i_2} + 3y^2_{i_1,i_2}\psi_{i_1,i_2} = 2(y_{i_1,i_2} - z_{i_1,i_2}),\quad (22)$$
$$x \in \omega_h;$$

$$\psi_{i_1,i_2} = 0,\ \ x \in \gamma_h, \quad (23)$$

де Λ – різницевий оператор Лапласа,

$$\psi_{i_1,i_2} \approx \psi(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}),\ y_{i_1,i_2} \approx y(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}),$$
$$z_{i_1,i_2} = z(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}),\ \ i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}\ \ (\alpha = 1,2).$$

Задача (22), (23) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно наближених значень $\tilde{\psi} = \{\psi_{i_1,i_2}\}$ функції $\psi(x) \equiv \psi(x;u)$ у внутрішніх вузлах сітки $\overline{\omega}_h$. Розв'язок такої задачі існує, єдиний і стійкий по правій частині [14]. Різницеву схему (22), (23) можна записати у вигляді лінійного операторного рівняння

$$T\,\tilde{\psi} = 2(\tilde{y} - \tilde{z})$$

у просторі H_h, де

$$T\,\tilde{\psi} \equiv -\Lambda\psi_{i_1,i_2} + 3y^2_{i_1,i_2}\psi_{i_1,i_2},\ \ x \in \omega_h .$$

Нескладно бачити, що T є самоспряженим і додатньо визначеним лінійним оператором в H_h з межами спектра

$$\eta_1 = \gamma_1,\ \eta_2 = \gamma_2 + c,$$

де γ_1 і γ_2 – відповідно мінімальне і максимальне власні значення оператора Λ:

$$\gamma_1 = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha} \ge \frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2},$$

$$\gamma_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha} \le \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}.$$

Ці властивості дозволяють застосовувати до розв'язання різницевої схеми (22), (23) різні ітераційні методи, в тому числі метод простої ітерації [14]

$$\psi^{(k+1)}_{i_1,i_2} = \psi^{(k)}_{i_1,i_2} + \tau\Big(\Lambda\psi_{i_1,i_2} - 3y^2_{i_1,i_2}\psi_{i_1,i_2} +$$
$$+ 2(y_{i_1,i_2} - z_{i_1,i_2})\Big),\ \ x \in \omega_h; \quad (24)$$
$$\psi^{(k)}_{i_1,i_2} = 0,\ \ x \in \gamma_h;\ \ k = 0,1,\ldots,$$

де $\tau = 2/(\eta_1 + \eta_2)$, $\tilde{\psi}^{(0)} \in H_h$ – довільне початкове наближення. За критерій закінчення процесу ітерацій (24) можна обрати такий: $\|\,\tilde{\psi}^{(k+1)} - \tilde{\psi}^{(k)}\,\|_{H_h} < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Після отримання для спряженої крайової задачі (6), (7) її сіткового розв'язку $\tilde{\psi} = \{\psi_{i_1,i_2}\},\ x \in \overline{\omega}_h$, що відповідає керуванню $\tilde{u} \in \tilde{U} \subset H_h$, можна визначити для даного $\tilde{u} \in \tilde{U}$ значення сіткового аналогу похідної Гато (5) на ω_h:

$$J_h'(\tilde{u}) = \psi_{i_1,i_2} + 2\mu(u_{i_1,i_2} - v_{i_1,i_2}),\ \ x \in \omega_h \quad (25)$$

і побудувати розрахункові формули деяких методів скінченновимірної умовної мінімізації для задачі пошуку нижньої грані сіткового функціонала (16) за умов (17) - (19).

Розглянемо метод наближеного розв'язання задачі оптимального керування (1) - (3), (15), оснований на застосуванні до сіткової задачі (16) - (19) ітераційного методу проєкції градієнта. Такий метод приводить до побудови в H_h послідовності наближень $\{\tilde{u}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \tilde{U}$ за формулами

$$\tilde{u}^{(k+1)} = P_{\tilde{U}}(\tilde{u}^{(k)} - \alpha^{(k)} J_h'(\tilde{u}^{(k)})), \quad (26)$$

$$k = 0,1,...; \ \tilde{u}^{(0)} \in \tilde{U},$$

де $P_{\tilde{U}}$ – оператор проєктування простору H_h на множину $\tilde{U}$; $J_h'(\tilde{u}^{(k)})$ – похідна Гато сіткового функціонала (16) в точці $\tilde{u}^{(k)} \in \tilde{U}$, яка обчислюється за формулою (25); $\alpha^{(k)} > 0$ – ітераційний параметр (кроковий множник) [17]. З урахуванням зазначеного, формули (26) реалізуються так:

$$u_{i_1,i_2}^{(k+1)} = \begin{cases} d_1, & u_{i_1,i_2}^{(k)} - \alpha^{(k)} J_h'(\tilde{u}^{(k)}) < d_1, \\ d_2, & u_{i_1,i_2}^{(k)} - \alpha^{(k)} J_h'(\tilde{u}^{(k)}) > d_2, \quad x \in \omega_h; \\ u_{i_1,i_2}^{(k)} - \alpha^{(k)} J_h'(\tilde{u}^{(k)}), & \text{інакше}, \end{cases}$$

$$\tilde{u}^{(k)} = \{u_{i_1,i_2}^{(k)}\}, \ k = 0,1,...$$

Нескладно перевірити, що сформульовані в [17] умови теореми про збіжність ітераційного методу проєкції градієнта виявляються для сіткової задачі оптимального керування (16) - (19) виконаними.

Для розв'язання сіткової задачі керування (16) - (19), що апроксимує вихідну задачу оптимального керування (1) - (3), (15) на сітці $\bar{\omega}_h$, можна також послуговуватися методом умовного градієнта [17], який призводить до побудови послідовності наближень $\{\tilde{u}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \tilde{U}$ за формулами

$$\tilde{u}^{(k+1)} = \tilde{u}^{(k)} + \alpha^{(k)}(\bar{u}^{(k)} - \tilde{u}^{(k)}), \quad (27)$$

$$k = 0,1,...; \ \tilde{u}^{(0)} \in \tilde{U},$$

де $0 \le \alpha^{(k)} \le 1$ – ітераційний параметр; $\bar{u}^{(k)} \in \tilde{U}$ – допоміжне наближення, яке вибирається з умови

$$(J_h'(\tilde{u}^{(k)}), \ \bar{u}^{(k)})_{H_h} = \min_{\tilde{u} \in \tilde{U}} \ (J_h'(\tilde{u}^{(k)}), \ \tilde{u})_{H_h}$$

і яке для множини (19) виписується у явному вигляді:

$$\bar{u}_{i_1,i_2}^{(k)} = \begin{cases} d_1, & J_h'(\tilde{u}^{(k)}) \ge 0, \\ d_2, & J_h'(\tilde{u}^{(k)}) < 0, \end{cases} \quad x \in \omega_h; \quad (28)$$

$$\bar{u}^{(k)} = \{\bar{u}_{i_1,i_2}^{(k)}\}, \ k = 0,1,...$$

Збіжність методу умовного градієнта (27), (28) для сіткової задачі оптимального керування (16) - (19) випливає із загальної теореми про збіжність цього методу в гільбертовому просторі [17]. За критерії зупинки ітераційних процесів мінімізації (26) та (27), (28) можна взяти один або декілька з відомих критеріїв:

$$\| \tilde{u}^{(k+1)} - \tilde{u}^{(k)} \|_{H_h} < \varepsilon;$$

$$| J_h(\tilde{u}^{(k+1)}) - J_h(\tilde{u}^{(k)}) | < \varepsilon; \ \| J_h'(\tilde{u}^{(k)}) \|_{H_h} < \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – задана точність обчислень.

Нескладно бачити, що метод сіток розв'язання задачі (1) - (3), (15) є за суттю методом проєкційного типу, описаним вище. Дійсно, якщо позначити через $\bar{\omega}_{h_n}, \ n = 1,2,...$ послідовність сіток у прямокутнику $\bar{\Omega}$, що подрібнюються:

$$\bar{\omega}_{h_n} = \omega_{h_n} \cup \gamma_{h_n} = \{(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \in \bar{\Omega}:$$

$$x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha^{(n)}, \ i_\alpha = 0,1,..., N_\alpha^{(n)}, \ \alpha = 1,2\}, \quad (29)$$

$$N_\alpha^{(n+1)} > N_\alpha^{(n)}, \ n = 1,2,...; \ N_\alpha^{(1)} > 0 \ (\alpha = 1,2),$$

де $h_1^{(n)} = l_1 / N_1^{(n)}$ і $h_2^{(n)} = l_2 / N_2^{(n)}$ – кроки за напрямами x_1 та x_2 відповідно, $h_n = (h_1^{(n)}, \ h_2^{(n)})$, то в ролі задачі (9) ($F(u) \to \inf, \ u \in U \subset H$) тут виступає задача мінімізації за умов (2), (3), (15) функціонала (1) ($F(u) = J(u)$), заданого на множині (15) гільбертова простору $H = L_2[0, \ T]$, а роль наближених задач (14) ($\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \to \inf, \ \ \tilde{u}_n \in \tilde{U}_n \subset \tilde{H}_n$), відіграють відповідно задачі мінімізації за умов (17)-(19) сіткових функціоналів виду (16) ($\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) = J_{h_n}(\tilde{u}_n)$), заданих на множинах виду (19) з гільбертових просторів $\tilde{H}_n = H_{h_n}$ сіткових функцій $\tilde{u}_n = \{u_{i_1,i_2}\}$, $x \in \omega_{h_n}$, визначених на сітках (29), з нульовими значеннями на межі γ_{h_n} ($n = 1,2,...$).

Дотримуючись [17], підпростори $H_n \subset H$, ізоморфні до просторів $\tilde{H}_n$, визначимо як гільбертові простори кусково-сталих функцій

$$u_n(x) = \sum_{i_1=0}^{N_1^{(n)}-1} \sum_{i_2=0}^{N_2^{(n)}-1} u_{i_1,i_2} \chi_{i_1,i_2}^{(n)}(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (30)$$

де $\chi_{i_1 i_2}^{(n)}(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ – характеристична функція комірки $\Omega_{i_1 i_2}^{(n)} = \{x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}:$ $x_\alpha^{(i_\alpha)} \le x_\alpha < x_\alpha^{(i_\alpha+1)}$, α=1,2$\}$ сіткової області $\bar{\omega}_{h_n}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Функція (30) вочевидь в усіх точках такої комірки приймає однакові значення, рівні u_{i_1,i_2}. Легко бачити, що $\| u_n \|_H = \| \tilde{u}_n \|_{\tilde{H}_n}$, тобто простори H_n і $\tilde{H}_n$ ізометричні [18]. Оператор Φ_n, що відображає H_n на $\tilde{H}_n$, визначимо як оператор, який кожній функції $u_n(x) \in H_n$ виду (30) ставить у взаємно однозначну відповідність сіткову функцію $\tilde{u}_n = \{u_{i_1,i_2}\} \in H_{h_n}$, $u_{i_1,i_2} = u_n(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $x \in \omega_{h_n}$; Φ_n^{-1} – оператор, що здійснює оборотне відображення. Ясно, що $\| \Phi_n \| = \| \Phi_n^{-1} \| = 1$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Як зазначалось вище, функціонал $J(u)$ і $J_{h_n}(\tilde{u}_n)$ сильно опуклі і неперервні на замкнених обмежених опуклих множинах $U \subset L_2(\Omega)$ виду (15) і $\tilde{U}_n \subset H_{h_n}$ виду (19) відповідно ($n = 1, 2, \ldots$). Умова (12) для цих множин з урахуванням визначення оператора Φ_n^{-1} виконується в силу сепарабельності простору $L_2(\Omega)$, а здійсненність умови близькості (11) негайно випливає з твердження леми 9.2.2 з [17]. Таким чином, всі умови теореми 1 виявляються виконаними, що гарантує збіжність проєкційного (різницевого) методу для задачі (1) - (3), (15).

Апроксимаційна схема, основана на методі прямих

Метод прямих належить до групи методів наближеного розв'язання крайових задач, головна ідея яких пов'язана зі зниженням розмірності задачі за рахунок апроксимації крайової задачі для диференціального рівняння у частинних похідних системою диференціальних рівнянь, але з меншою кількістю неперервних змінних [15].

Будемо застосовувати до розв'язання еліптичних крайових задач (2), (3) та (6), (7) при заданому $u \in U$ з (15) метод прямих, для чого побудуємо решітчасту область Ω_{N_2} з межею Γ_{N_2}, розбивши прямокутник $\bar{\Omega}$ на $N_2 + 1$ смуги прямими $x_2 = x_2^{(i_2)}$ з кроком $h_2 = l_2 / N_2$ ($N_2 > 0$):

$$\Omega_{N_2} = \{(x_1, x_2^{(i_2)}) \in \Omega: \ 0 < x_1 < l_1,$$
$$x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, \ i_2 = 1, 2, \ldots, N_2 - 1\}. \quad (31)$$

Межа Γ_{N_2} складається з таких двох відрізків прямих та точок:

$$\Gamma_{N_2} \{0 \le x_1 \le l_1, \ x_2 = 0; \ 0 \le x_1 \le l_1, \ x_2 = l_2;$$
$$(0, x_2^{(i_2)}), \ (l_1, x_2^{(i_2)}), \ i_2 = 1, 2, \ldots, N_2 - 1\}. \quad (32)$$

На решітці Ω_{N_2} замінимо похідну $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}$ в рівнянні (2) відповідним різницевим виразом другого порядку точності і отримаємо систему нелінійних ЗДР

$$-\frac{d^2 y_{i_2}}{dx_1^2}(x_1) - \frac{y_{i_2-1}(x_1) - 2y_{i_2}(x_1) + y_{i_2+1}(x_1)}{h_2^2} +$$
$$+ y_{i_2}^3(x_1) = f(x_1, x_2^{(i_2)}) + u(x_1, x_2^{(i_2)}), \quad (33)$$
$$0 < x_1 < l_1, \ i_2 = \overline{1, N_2 - 1}$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} &y_{i_2}(0) = 0, \ y_{i_2}(l_1) = 0, \ i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, \\ &y_0(x_1) = 0, \ y_{N_2}(x_1) = 0, \ 0 \le x_1 \le l_1, \end{aligned} \quad (34)$$

де $y_{i_2}(x_1) \approx y(x_1, x_2^{(i_2)})$, $(x_1, x_2^{(i_2)}) \in \bar{\Omega}_{N_2}$.

Аналогічно можна побудувати на решітці $\bar{\Omega}_{N_2} = \Omega_{N_2} + \Gamma_{N_2}$ лінійну крайову задачу для системи ЗДР, що апроксимує з другим порядком точності спряжену еліптичну крайову задачу (6), (7):

$$-\frac{d^2 \psi_{i_2}}{dx_1^2}(x_1) - \frac{\psi_{i_2-1}(x_1) - 2\psi_{i_2}(x_1) + \psi_{i_2+1}(x_1)}{h_2^2} +$$
$$+ 3y_{i_2}^2(x_1)\psi_{i_2}(x_1) = 2(y_{i_2}(x_1) - z(x_1, x_2^{(i_2)})), \quad (35)$$
$$0 < x_1 < l_1, \ i_2 = \overline{1, N_2 - 1};$$

$$\begin{aligned} &y_{i_2}(0) = 0, \ y_{i_2}(l_1) = 0, \ i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, \\ &y_0(x_1) = 0, \ y_{N_2}(x_1) = 0, \ 0 \le x_1 \le l_1, \end{aligned} \quad (36)$$

де $\psi_{i_2}(x_1) \approx \psi(x_1, x_2^{(i_2)})$, $(x_1, x_2^{(i_2)}) \in \bar{\Omega}_{N_2}$.

Зазначимо, що вибір напрямку прямих під час решітчастої апроксимації області $\bar{\Omega}$ й основної та спряженої диференціальних задач на ній в загальному випадку залежить від вигляду нелінійності керованої системи і в даному випадку не має принципового значення. Відмітимо також, що для квазілінійних еліптичних задач розв'язуваність, стійкість, збіжність та оцінки похибки решітчастих схем досліджені у [15]. Для наближеного розв'язування крайових задач (33), (34) та (35), (36) при заданому $u \in U$ з (15) можна скористатись методом стрільби [19, 20] з наступним числовим розв'язанням допоміжних задач Коші на сітці точок

$$\bar{\omega}_{h_1} = \{x_1^{(i_1)} \in [0,\ l_1]:\ x_1^{(i_1)} = i_1 h_1,\ i_1 = \overline{0, N_1}\},$$

де $h_1 = l_1 / N_1,\ N_1 > 0$, за допомогою будь-якого відомого методу, зокрема методу Рунге - Кутта.

Метод прямих розв'язання задачі керування (1) - (3), (15) є за суттю методом проєкційного типу. Можна показати, користуючись наведеними вище результатами для методу сіток, що умови теореми 1 про збіжність проєкційного методу для задачі мінімізації функціонала (1) за умов (2), (3), (15) в цьому випадку також виконуються.

Проєкційно - ітераційні схеми розв'язання задачі керування

Розглянемо питання про застосування до розв'язання задачі оптимального керування (1) - (3), (15) проєкційно-ітераційного методу, основаного на методі проєкції градієнта. Зазначимо, що стосовно до задачі опуклої оптимізації (8), (9) в гільбертовому просторі H цей метод полягає в тому, що ітераційний метод проєкції градієнта використовується для розв'язання кожної із наближених задач (14) (з опуклими неперервнодиференційованими функціоналами $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на опуклих множинах $\tilde{U}_n$) в гільбертових просторах $\tilde{H}_n$, причому будується лише декілька наближень $\tilde{u}_n^{(k)} \in \tilde{U}_n,\ k = 1, 2, ..., k_n$, останнє з яких залучається до формування початкового наближення в ітераційному процесі для наступної наближеної задачі в просторі $\tilde{H}_{n+1}$:

$$\tilde{u}_n^{(k+1)} = P_{\tilde{U}_n}(\tilde{u}_n^{(k)} - \tilde{\alpha}_n^{(k)} \tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)})), \quad (37)$$

$$k = 0, 1, ..., k_n - 1;\ \ n = 1, 2, ...$$

$$(\tilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)},\ n = 1, 2, ...;\ \ \tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{U}_1).$$

Умови слабкої та сильної збіжності в H послідовності наближень $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ проєкційно-ітераційного методу (37) до точки мінімуму функціонала $F(u)$ на U теоретично обґрунтовані в роботі [21] для випадка, коли кроковий множник $\tilde{\alpha}_n^{(k)} > 0$ визначається з умови

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)}) \geq \delta \| \tilde{u}_n^{(k+1)} - \tilde{u}_n^{(k)} \|_{\tilde{H}_n}^2,$$

де $\delta > 0$ – параметр алгоритму.

Застосування до кожної із наближених задач (14) з опуклими неперервнодиференційованими на опуклих множинах $\tilde{U}_n$ функціоналами $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ ітераційного методу умовного градієнта за означеним проєкційно-ітераційним принципом приводить до побудови в H-послідовності наближень $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, що визначається формулами

$$\tilde{u}_n^{(k+1)} = \tilde{u}_n^{(k)} + \tilde{\alpha}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)}), \quad (38)$$

$$k = 0, 1, ..., k_n - 1;\ \ n = 1, 2, ...$$

$$(\tilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)},\ n = 1, 2, ...;\ \ \tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{U}_1),$$

де $0 \leq \tilde{\alpha}_n^{(k)} \leq 1$ – кроковий множник, який можна, наприклад обирати з умови

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)}) \geq \tilde{\varepsilon}_n\, \tilde{\alpha}_n^{(k)} \,|\, \tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) \,|,$$

$0 < \tilde{\varepsilon}_n < 1$ – параметр алгоритму. Збіжність проєкційно-ітераційного методу (38) для розв'язання загальної екстремальної задачі з обмеженнями в гільбертовому просторі обґрунтована в роботі [16]. За запропонованою методологією можна перевірити виконуваність умов збіжності проєкційно-ітераційних процесів (37), (38) стосовно до задачі оптимального керування (1) - (3), (15) зі степеневою нелінійністю.

Отже, для наближеного розв'язання задачі (1) - (3), (15) за допомогою будь-якої із наведених проєкційно-ітераційних схем (37), (38) слід до кожної із сіткових задач мінімізації (16) - (19) (або, що те ж саме, наближених задач (14)), починаючи із

задачі невеликої розмірності, застосувати відповідний ітераційний метод градієнтного типу та побудувати на $\bar{\omega}_{h_n}$ лише декілька наближень $\tilde{u}_n^{(k)} = \{u_{i_1,i_2}^{(k)}\} \in \tilde{U}_n$, $k = 1, 2, ..., k_n$, останнє з яких із використанням кусково-сталої інтерполяції (30) обрати за початкове наближення

$$\tilde{u}_{n+1}^{(0)} = \{u_{i_1,i_2}^{(0)}\} \in \tilde{U}_{n+1},$$

$$u_{i_1,i_2}^{(0)} = \sum_{j_1=0}^{N_1^{(n)}-1} \sum_{j_2=0}^{N_2^{(n)}-1} u_{j_1,j_2}^{(k_n)} \chi_{j_1,j_2}^{(n)} (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}), \quad x \in \omega_{h_{n+1}}$$

до розв'язку наступної сіткової задачі (16)-(19) на сітці $\bar{\omega}_{h_{n+1}}$. Критерієм зупинки проєкційно-ітераційних процесів (37), (38) може служити один або декілька з наступних критеріїв:

$$\| \tilde{u}_n^{(0)} - \tilde{u}_n^{(k_n)} \|_{H_h} < \varepsilon; \quad \| J'_{h_n} (\tilde{u}_n^{(k_n)}) \|_{H_h} < \varepsilon;$$

$$| J_{h_n} (\tilde{u}_n^{(k_n)}) - J_{h_{n+1}} (\tilde{u}_{n+1}^{(k_{n+1})}) | < \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – задана точність обчислень.

Числова реалізація алгоритмів

Для аналізу ефективності запропонованих проєкційно-ітераційних схем було виконано їх програмну реалізацію та тестування на прикладі розв'язання декількох модельних задач оптимального керування виду (1) - (3), (15), одна з яких мала такі вхідні дані: $\bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2): 0 \le x_\alpha \le 1, \alpha = 1, 2\}$, $\mu = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $z(x) = x^2(1 - x)$, $v(x) = x(1 - x)$, $f(x) = \sin s \sin(1 - x)$. Під час реалізації проєкційно-ітераційних алгоритмів сукупність вкладених вдвічі сіток $\bar{\omega}_{h_n}$ $(n = 1, 2, ..., m)$ визначалася порядком $N_1^{(1)} = N_2^{(1)} = 5$ первинного розбиття і для отримання наближеного розв'язку задачі з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ виявилася складеною з $m = 5$ сіток з порядком дискретизації останньої $N_1^{(m)} = N_2^{(m)} = 80$. Кількість k_n наближень на n-му кроці алгоритму визначалась як найменше ціле k, що задовольняло нерівність

$$| J_{h_n} (\tilde{u}_n^{(k)}) - J_{h_n} (\tilde{u}_n^{(k-1)}) | < \varepsilon_n,$$

в якій $\varepsilon_n > 0$ вибиралось згідно з порядком сіткової апроксимації вихідної задачі керування; критерієм закінчення проєкційно-ітераційного процесу служила умова $\varepsilon_n \le \varepsilon$. Зокрема, на початковому наближенні $\tilde{u}_1^{(0)} = \{1,5\}_{\overline{i_\alpha = 1, N_\alpha^{(1)} - 1} \ (\alpha = 1,2)} \in \tilde{U}_1$, що задавалось на першому кроці проєкційно-ітераційного алгоритму (38), основаному на методі умовного градієнта, наближений розв'язок вихідної задачі було отримано за $\sum_{n=1}^{m} k_n = 2+3+3+4+3=15$ ітерацій; час рахунку склав 3,42 хв.; для функціонала (1) було отримано наближене значення $J(u) \approx 0,3075$. Під час розв'язання тієї ж задачі керування звичайним сітковим методом з використанням методу умовного градієнта на одній останній сітці з $N_1 = N_2 = 80$, точністю обчислень $\varepsilon = 10^{-4}$ і початковим наближенням, рівним *1,5* в кожному вузлі такої сітки, наближений розв'язок задачі було знайдено за *23* ітерації, що зажадало 8,30 хв. часу; для функціонала (1) було отримано наближене значення $J(u) \approx 0,3098$. Графічні зображення отриманих наближених розв'язків модельної задачі керування подані на рис. 1, 2.

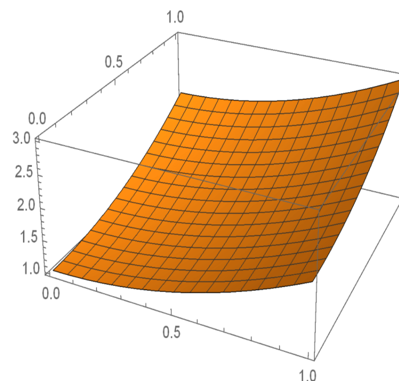


Рис. 1. Графік залежності керування $u(x_1, x_2)$

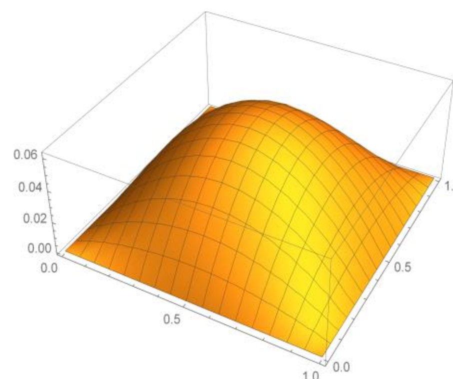


Рис. 2. Графік залежності функції $y(x_1, x_2)$ стану системи

Висновки

У роботі розглянуто результати застосування проєкційно-ітераційного підходу до розв'язування задачі оптимального керування системою, що описується диференціальним рівнянням другого порядку у частинних похідних еліптичного типу зі степеневою нелінійністю. Розроблено проєкційно-ітераційні алгоритми, основані на методах скінченних різниць і прямих як методах проєкційного типу та ітераційних методах проєкції градієнта й умовного градієнта. Досліджено умови апроксимації та збіжності сіткових алгоритмів, розглянуто різні стратегії подрібнення сіток і формування початкових наближень в проєкційно-ітераційних алгоритмах. Розроблено комп'ютерні засоби, що реалізують різні обчислювальні схеми проєкційно-ітераційних алгоритмів, проведено аналіз їх ефективності на прикладі розв'язання модельних задач.

За отриманими у роботі результатами можна зробити такі основні висновки:

- в проєкційно-ітераційних алгоритмах, основаних на методах сіток і прямих, не потрібно знати заздалегідь кінцевий порядок дискретизації області, визначення якого є практично складним;
- в проєкційно-ітераційних алгоритмах полегшується вибір початкового наближення, оскільки воно має обиратися лише для першої сіткової задачі невисокого порядку; початкове наближення для кожної із наступних сіткових задач однозначно визначається схемою методу. Якщо при цьому врахувати, що під час розв'язання прикладних нелінійних задач вибір початкового наближення не завжди вдається зробити вдало, то стає зрозумілим, що застосування проєкційно-ітераційного підходу виявляється більш доцільним, оскільки він дозволяє вже при невеликому порядку сіткової задачі суттєво наблизитися до шуканого розв'язку. Остання перевага набуває ще більшого значення, якщо з ростом порядку дискретизації диференціальної задачі обумовленість системи сіткових рівнянь має тенденцію погіршуватися;
- в проєкційно-ітераційних алгоритмах зменшуються обчислювальні витрати на побудову наближень, значна частина яких будується для сіткових задач невисоких порядків;
- складність проєкційно-ітераційних алгоритмів несуттєво зростає в порівнянні зі складністю відповідних алгоритмів проєкційного типу, оскільки перші відрізняються від останніх лише додаванням одного зовнішнього циклу з модифікації розбиття сіткової області;
- до недоліків проєкційно-ітераційних алгоритмів можна віднести потребу у дещо більшому обсязі пам'яті комп'ютера при зберіганні масивів змінних на проміжних етапах.

Для подальших досліджень у цьому напрямку передбачається розглянути можливість застосування регуляризуючих обчислювальних схем за проєкційно-ітераційним принципом для розв'язання некоректних задач оптимального керування системами з розподіленими параметрами.

References

1. Shevchenko A.I., Minenko A.S. (2012) *Research methods for nonlinear mathematical models*. К.: Nauk. dumka.
2. Lions J.-L. (1971) *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Berlin: Springer-Verlag.
3. Muravei L.A., Petrov V.M., Romanenkov A.M. (2018) *Optimal control of nonlinear processes in problems of mathematical physics*. M.: Publishing house MAI.
4. Neittaanmaki P., Sprekels J., Tiba D. (2006) *Optimization of elliptic systems: theory and applications*. New York: Springer. doi: 10.1007/b138797
5. Kogut O.P., Kogut P.I., Ryadno O.A. (2010) *Optimization in nonlinear elliptic boundary value problems*. Dnipropetrovsk: DDFA.
6. Serovaiskiy S.Ya. (2006) *Optimization and differentiation. T. 1. Minimization of functionals. Stationary systems*. – Almaty: Print-S.
7. Shevchenko A.I., Minenko A.S. (2015) *Qualitative properties of solutions of one class of evolutionary*

systems. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 1, 36-40. doi: 10.15407/dopovidi2015.01.036
8. Cindea N., Matei A., Micu S., Niţă C. (2020) Boundary optimal control for antiplane problems with power-law friction. *Applied Mathematics and Computation*, 386(6): 125448. doi: 10.1016/j.amc.2020.125448.
9. Wang K., Zhao D., Feng B. (2018) Optimal nonlinearity control of Schrödinger equation. *Evolution Equations and Control Theory*, 7(2), 317-334. doi: 10.3934/eect.2018016.
10. Serovaiskii S.Ya. (2010) The necessary optimality conditions for a nonlinear stationary system whose state functional is not differentiable with respect to the control. *Russian Mathematics*, 54(6), 26–38. doi: 10.3103/S1066369X10060046.
11. Serovaiskiy S.Ya. (1984) An optimal control problem for an elliptic system with a power-law nonlinearity. *Siberian Mathematical Journal*, 25 (1), 120-125.
12. Hervé Le D. (2018) *Nonlinear elliptic partial differential equations: An introduction*. – Cham: Springer.
13. Serovaiskiy S.Ya. (1991) Necessary and sufficient conditions for optimality for a system described by a nonlinear elliptic equation. *Siberian Mathematical Journal*, 32 (3), 141–150.
14. Samarskii A.A. (2001) *The theory of difference schemes*. New York: Marcel Dekker Inc.
15. Lyashko A.D. (1972) Method of lines for quasilinear elliptic equations. *Differential Equations*, 8 (5), 891-901.
16. Hart L.L. (2017) Projection-iteration methods for solving operator equations and problems of infinite-dimensional optimization. Dis. ... Dr. Phys.-Math. Sciences, 01.05.01, MES of Ukraine, Dnipro: DNU.
17. Vasiliev F.P. (1974) *Lectures on methods for solving extremal problems*. M.: Publishing house of MSU.
18. Balashova S.D., Tavadze L.L., Tavadze E.L. (1991) Application of projection-iteration methods to the solution of the Dirichlet problem for the Poisson equation. Dnepropetrovsk. Dep. in VINITI 13.06.91, No. 2486-B 91, 28 p.
19. Stoer J., Bulirsch R. (2002) *Introduction to Numerical Analysis*. New York : Springer.
20. Hart L.L., Polyakov M.V. (2004) Comparative analysis of iterative schemes of the method of lines for solving a weakly nonlinear elliptic problem. *Problems of Applied Mathematics and Mathematical Modeling*, 47-57.
21. Balashova S.D., Tavadze E.L. (1996) On the convergence of the projection-iteration method for solving an extremal problem with constraints. *Mathematical models and computational methods in applied problems*, 1-8.

Література

1. Шевченко А.И., Миненко А.С. (2012) *Методы исследования нелинейных математических моделей*. К.: Наук. думка.
2. Lions J.-L. (1971) *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Berlin: Springer-Verlag.
3. Муравей Л.А., Петров В.М., Романенков А.М. (2018) *Оптимальное управление нелинейными процессами в задачах математической физики*. М.: Изд-во МАИ.
4. Neittaanmaki P., Sprekels J., Tiba D. (2006) *Optimization of elliptic systems: theory and applications*. New York: Springer. doi: 10.1007/b138797.
5. Когут О.П., Когут П.І., Рядно О.А. (2010) *Оптимізація в нелінійних еліптичних крайових задачах*. Дніпропетровськ: ДДФА.
6. Серовайский С.Я. (2006) *Оптимизация и дифференцирование. Т. 1. Минимизация функционалов. Стационарные системы*. – Алматы: Print-S.
7. Шевченко А.И., Миненко А.С. (2015) Качественные свойства решений одного класса эволюционных систем. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 1, 36-40. doi: 10.15407/dopovidi2015.01.036.
8. Cindea N., Matei A., Micu S., Niţă C. (2020) Boundary optimal control for antiplane problems with power-law friction. *Applied Mathematics and Computation*, 386(6): 125448. doi: 10.1016/j.amc.2020.125448.
9. Wang K., Zhao D., Feng B. (2018) Optimal nonlinearity control of Schrödinger equation. *Evolution Equations and Control Theory*, 7(2), 317-334. doi: 10.3934/eect.2018016.
10. Serovaiskii S.Ya. (2010) The necessary optimality conditions for a nonlinear stationary system whose state functional is not differentiable with respect to the control. *Russian Mathematics*, 54(6), 26–38. doi: 10.3103/S1066369X10060046.
11. Серовайский С.Я. (1984) Задача оптимального управления для эллиптической системы со степенной нелинейностью. *Сибирский математический журнал*, 25(1), 120-125.
12. Hervé Le D. (2018) *Nonlinear elliptic partial differential equations: An introduction*. – Cham: Springer.
13. Серовайский С.Я. (1991) Необходимые и достаточные условия оптимальности для системы, описываемой нелинейным эллиптическим уравнением. *Сибирский математический журнал*, 32(3), 141–150.
14. Samarskii A.A. (2001) *The theory of difference schemes*. New York: Marcel Dekker Inc.
15. Ляшко А.Д. (1972) Метод прямых для квазилинейных эллиптических уравнений. *Дифференциальные уравнения*, 8(5), 891-901.
16. Гарт Л.Л. (2017) Проекційно-ітераційні методи розв’язання операторних рівнянь та задач нескінченновимірної оптимізації. Дис... д-ра фіз.-мат. наук, 01.05.01, МОН України, Дніпро: ДНУ.
17. Васильев Ф.П. (1974) *Лекции по методам решения экстремальных задач*. М.: Изд-во МГУ.
18. Балашова С.Д., Тавадзе Л.Л., Тавадзе Э.Л. (1991) Применение проекционно-итерационных методов к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Днепропетровск. Деп. в ВИНИТИ 13.06.91, № 2486–В 91, 28 с.
19. Stoer J., Bulirsch R. (2002) *Introduction to Numerical Analysis*. New York : Springer.
20. Гарт Л.Л., Поляков М.В. (2004) Порівняльний аналіз ітераційних схем методу прямих для розв’язання слабконелінійної еліптичної задачі. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, 47-57.

21. Балашова С.Д., Тавадзе Э.Л. (1996) О сходимости проекционно-итерационного метода решения экстремальной задачи с ограничениями. *Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах*, 1-8.

Received 01.12.2021
Accepted 10.12.2021